

Logik

A und B Aussagen, dann
(Konnektiven bzw. "logische Operationen")

$A \Rightarrow B$ "wenn A, dann B", "aus A folgt B"

$A \Leftrightarrow B$ "A ist äquivalent zu B", "A genau dann, wenn B"

$\neg A$ "nicht A"

$A \vee B$ "A oder B"

$A \wedge B$ "A und B"

Wahrheit der zusammengesetzten Aussage hängt von den einzelnen Teilen ab.

Wahrheitstafel

A	$\downarrow$ B	$\downarrow$ $\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$(\neg A \vee B)$ $A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ $A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	w	f	w	f
f	f	w	f	f	w	w

⊢ Tautologie = "Aussage, die immer wahr ist"

Bsp 1) $A \vee \neg A$

2) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

3) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$\neg(\neg A)$
w	f	w	w
f	w	w	f

$$4) \neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$

$$5) (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \text{ indirekter Beweis}$$

$$(n \text{ gerade} \Rightarrow n^2 \text{ gerade}) \Leftrightarrow (n^2 \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade})$$

$$6) (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$$

Quantoren: $\forall$ "für alle"
 $\exists$ "existiert"

Bsp 1) Die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$
 hat keine reelle Lösungen

$$(\neg \exists x \in \mathbb{R}) (x^2 + x + 1 = 0)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 + x + 1 \neq 0)$$

beim Negieren
 vertauschen sich
 die Quantoren

2) $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) (x > y)$ ist falsch
 sodass gilt $y = x + 1$

$(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) (x > y)$ ist wahr
 sodass gilt $y = x - 1$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
 f ist stetig im Punkt x_0

Mengen

$a \in A$ heißt "a ist ein Element
 der Menge A"

$x \notin A$ "x liegt nicht in A"

Bsp $X = \{a, b, c, d\}$ $a \in X, b \in X, c \in X, d \in X$
und kein anderes Objekt
liegt in X .

► $A = B$ heißt: für jedes x gilt $x \in A \Leftrightarrow x \in B$

► $A \subset B$ heißt: für jedes x gilt $x \in A \Rightarrow x \in B$
Teilmenge ($\forall x \in A$ gilt $x \in B$)

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

natürliche ganze rationale reelle komplexe

$A \subsetneq B$ steht für $A \subset B$ und $A \neq B$

Eigenschaften: 1) für jede Menge A
gilt $A \subset A$

2) Wenn $A \subset B$ und $B \subset C$
so ist $A \subset C$

3) $A \subset B$ und $B \subset A \Rightarrow A = B$

Bsp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$
= "Lösungsmenge der Gleichung"
= $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x^2 + x + 1 = 0\}$

Kann sein, dass kein x in A liegt!
Dann schreibt man $A = \emptyset$ (ist leer, leere Menge)

Eigenschaften: 1) Für jede Menge X
gilt $\emptyset \subset X$

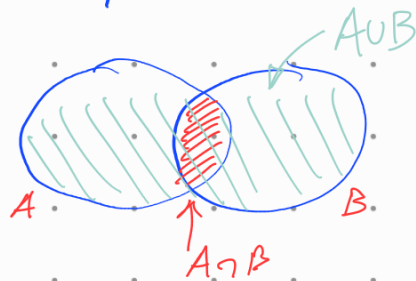
2) Gilt $X \subset \emptyset$, so ist $X = \emptyset$

► Potenzmenge $P(X)$ hat alle Teilmengen von X als Elemente

Bsp $P(\{1, 2, 3\}) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$
hat $8 = 2^3$ Elemente

► Mengenoperationen

Schnitt $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$
Vereinigung $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$



Bsp Distributivgesetz

Beh: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Bew: z.z. 1) linke Menge $\subset$ rechte
2) rechte $\subset$ linke

1) Sei $x \in A \cup (B \cap C)$ z.z. $x \in \underline{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \end{aligned}$$

Es gibt 2 Mö

I: $x \in A$ Dann gilt auch $\left. \begin{array}{l} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{array} \right\}$
und
 $\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \checkmark$

II $x \in B$ und $x \in C$
 $\left. \begin{array}{l} \text{Da } x \in B, \text{ gilt auch } x \in A \cup B \\ \text{Da } x \in C, \text{ gilt auch } x \in A \cup C \end{array} \right\}$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \checkmark$

